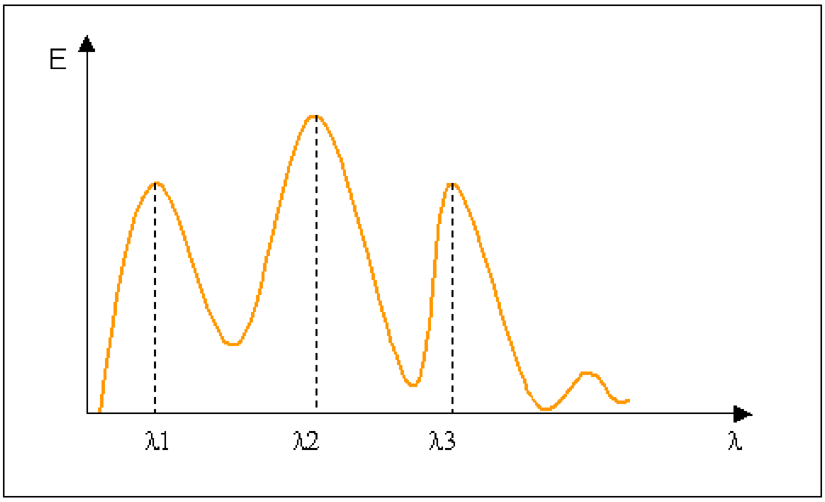
IL CORPO NERO

PREMESSA

Tutti i corpi emettono ad ogni temperatura, ma solo radiazione infrarossa (non rivelata dai nostri occhi) viene prodotta a temperatura ambiente ($T \cong 293°K$), ciò genera la falsa idea che i corpi emettano radiazione solo quando diventano incandescenti.
L'emissione di **luce visibile** avviene soltanto da parte di corpi riscaldati a temperature $T \geq 500°K$.
Una superficie liscia di $1cm^2$ di tungsteno alla temperatura di 2000°K emette 23.5W, mentre una superficie liscia di $1cm^2$ di molibdeno alla temperatura di 2000°K emette 19.2W. L'emissione varia con il grado di ruvidità della superficie.

1. DEFINIZIONI E CONCETTI GENERALI

Si chiama **distribuzione spettrale** della **radiazione emessa** da un corpo l'andamento in funzione della **lunghezza d'onda** λ del flusso specifico emesso ε_λ ([1]), cioè irraggiato, dal corpo stesso. Si chiama ***radiazione termica*** quella che viene irraggiata, cioè emessa, da un solido, da un liquido o da un gas in virtù della sua temperatura. Se si esamina la distribuzione spettrale di tale radiazione, ovvero l'andamento in funzione della ***lunghezza d'onda*** λ del flusso specifico emesso ε_λ da un corpo a temperatura T, si ottiene una curva continua detta ***spettro termico di emissione*** del corpo (Fig. 1).



[1] Si definisce ***flusso specifico di radiazione emesso*** ε_λ il rapporto fra la quantità di energia ΔE emessa ed il prodotto fra la superficie emittente ΔA , l'intervallo di tempo Δt durante il quale avviene l'emissione e l'intervallo di lunghezza d'onda $[\lambda, \lambda+\Delta\lambda]$ di ampiezza $\Delta\lambda$ della radiazione emessa:

$$\varepsilon_\lambda = \Delta E / (\Delta A \, \Delta t \, \Delta\lambda) \qquad [J/m^2 s\ m] = [W/m^3]$$

Si definisce ***flusso (totale o integrale) di radiazione emesso*** ε il rapporto fra la quantità di energia ΔE emessa ed il prodotto fra la superficie emittente ΔA , l'intervallo di tempo Δt durante il quale avviene l'emissione :

$$\varepsilon = \int_0^{+\infty} \varepsilon_\lambda \, d\lambda \qquad [J/m^2 s] = [W/m^2]$$

In generale, sia il flusso specifico di energia ε_λ che quello totale termici emessi da un corpo sono tanto maggiori quanto maggiore è la sua temperatura. L'energia persa per **emissione termica** può essere compensata in molti modi: il corpo che emette può essere esso stesso una sorgente di energia, come nel caso delle stelle, oppure può ricevere energia, ad esempio, tramite l'assorbimento di radiazione da parte dei corpi circostanti. Nel caso di un corpo circondato da altri corpi, la sua energia interna rimarrà costante se l'energia da esso emessa nell'intervallo di tempo Δt sarà uguale a quella da esso assorbita nello stesso intervallo di tempo Δt. Se con F_λ si indica il flusso specifico di radiazione che investe la superficie di un corpo, si osserva che, in generale, una certa parte $F_{\lambda,r}$ di F_λ viene **riflessa,** una certa parte $F_{\lambda,t}$ di F_λ viene **trasmessa**, una certa parte $F_{\lambda,a}$ di F_λ viene **assorbita** (Fig. 2).

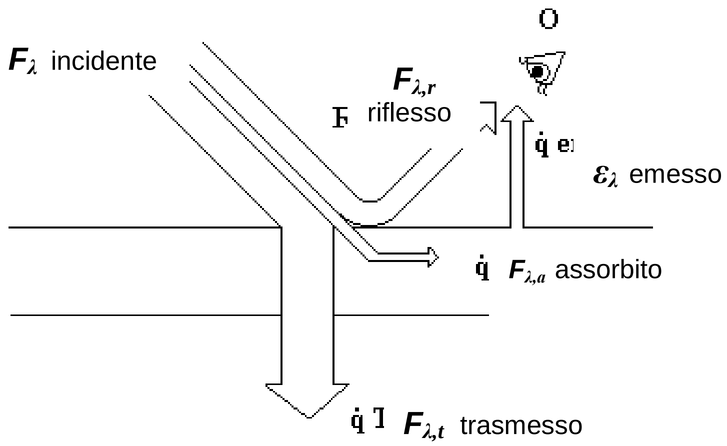


Fig. 2

Per la conservazione dell'energia deve essere necessariamente

$$F_\lambda = F_{\lambda,r} + F_{\lambda,t} + F_{\lambda,a}$$

da cui

$$1 = \frac{F_{\lambda,r}}{F_\lambda} + \frac{F_{\lambda,t}}{F_\lambda} + \frac{F_{\lambda,a}}{F_\lambda}$$

I rapporti

$$r_\lambda = \frac{F_{\lambda,r}}{F_\lambda} \geq 0 \quad \textit{coefficiente di riflessione specifico} \qquad (0 \leq r_\lambda \leq 1)$$

$$t_\lambda = \frac{F_{\lambda,t}}{F_\lambda} \geq 0 \quad \textit{coefficiente di trasmissione specifico} \qquad (0 \leq t_\lambda \leq 1)$$

$$a_\lambda = \frac{F_{\lambda,a}}{F_\lambda} \geq 0 \quad \textit{coefficiente di assorbimento specifico} \qquad (0 \leq a_\lambda \leq 1)$$

descrivono le proprietà ottiche dei corpi alla lunghezza d'onda λ e dipendono da vari fattori, fra i quali : la **temperatura** T del corpo, lo **stato fisico-chimico della sua superficie**, etc. Vale, ovviamente, la relazione

$$r_\lambda + t_\lambda + a_\lambda = 1 \qquad (1)$$

Sussistono i seguenti notevoli casi particolari:

$$\begin{array}{lll} r_\lambda = 1 & (\Rightarrow t_\lambda = a_\lambda = 0) & \textit{corpo perfettamente riflettente alla lunghezza d'onda } \lambda \\ t_\lambda = 1 & (\Rightarrow r_\lambda = a_\lambda = 0) & \textit{corpo perfettamente trasparente alla lunghezza d'onda } \lambda \\ a_\lambda = 1 & (\Rightarrow t_\lambda = r_\lambda = 0) & \textit{corpo perfettamente assorbente alla lunghezza d'onda } \lambda \end{array}$$

2. IL CORPO NERO.

Nel 1860 **Gustav Robert Kirchhoff** ha introdotto la seguente definizione di **CORPO NERO:**

"Si definisce corpo nero (black body = BB) un corpo $\mathscr{C}$ con coefficiente di assorbimento unitario per qualsiasi coppia di valori della lunghezza d'onda λ e della temperatura T , cioè capace di assorbire qualsiasi radiazione incidente su di esso".

$$\mathscr{C} \ \text{corpo nero (Black Body)} \Leftrightarrow a_\lambda = a_{\lambda,BB} = 1 \quad \forall \lambda, T \qquad (2)$$

Più in particolare, pur dipendendo l'emissione e l'assorbimento, oltre che dalla temperatura, dalle caratteristiche chimico-fisiche della superficie, egli ha dimostrato che vale il seguente:

I TEOREMA DI KIRCHHOFF (1859)

Il rapporto $J(\lambda,T) \equiv \dfrac{\varepsilon(\lambda,T)}{a(\lambda,T)}$ è necessariamente lo stesso per tutti corpi e dipende solo dalla lunghezza d'onda e dalla temperatura assoluta.

Considerati, allora, due corpi $\mathscr{C}_A$ e $\mathscr{C}_B$ alla stessa temperatura T deve risultare

$$\frac{\varepsilon_{\lambda,A}(T)}{a_{\lambda,A}(T)} = \frac{\varepsilon_{\lambda,B}(T)}{a_{\lambda,B}(T)} = J(\lambda,\ T) \qquad (3)$$

Se ora si scrive la (3) per un generico corpo $\mathscr{C}$ e per un ***corpo nero*** $\mathscr{C}_{BB}$, entrambi alla stessa temperatura T, si ha

$$\frac{\varepsilon_\lambda(T)}{a_\lambda(T)} = \frac{\varepsilon_{\lambda,BB}(T)}{a_{\lambda,BB}(T)} = \frac{\varepsilon_{\lambda,BB}(T)}{1} = J(\lambda,\ T) \Rightarrow \varepsilon_{\lambda,BB}(T) = J(\lambda,\ T) \quad (4)$$

Pertanto se un corpo, ad una data temperatura T, emette un flusso specifico ε_λ (T) di radiazione, allora dovrà essere necessariamente a_λ (T) non nullo, poiché il loro rapporto dovrà essere uguale a J (λ, T), certamente finita. Ne consegue che, se un corpo emette radiazioni ad una determinata lunghezza d'onda λ, allora è in grado di assorbire anche quelle radiazioni, alla stessa temperatura T. Si osservi che il reciproco non è necessariamente vero: se a_λ (T) non è nullo, ε_λ (T) può esserlo dato che $J(\lambda, T) \geq 0$.

In definitiva:

"**Un corpo a temperatura T emette la radiazione termica che è capace di assorbire, a condizione che tali radiazioni siano emesse da un corpo nero alla stessa temperatura T.**"

Dato che per qualsiasi corpo deve risultare $a_{\lambda,BB}$ (T) ≥ a_λ (T) , valendo necessariamente la (6), dovrà anche essere $\varepsilon_{\lambda,BB}$ (T) ≥ ε_λ (T) . Pertanto, un corpo nero, oltre ad essere un **assorbitore perfetto**, è anche un **emettitore perfetto**.

In simboli :

$$\begin{aligned} &\varepsilon_\lambda(T) \neq 0 \Rightarrow a_\lambda(T) \neq 0 \\ &a_\lambda(T) \leq a_{\lambda,BB}(T) \Rightarrow \varepsilon_\lambda(T) \leq \varepsilon_{\lambda,BB}(T) \end{aligned}$$

II TEOREMA DI KIRCHHOFF

Una radiazione di corpo nero è equivalente alla radiazione uscente da un piccolo foro di un corpo in cui sia stata praticata una cavità.

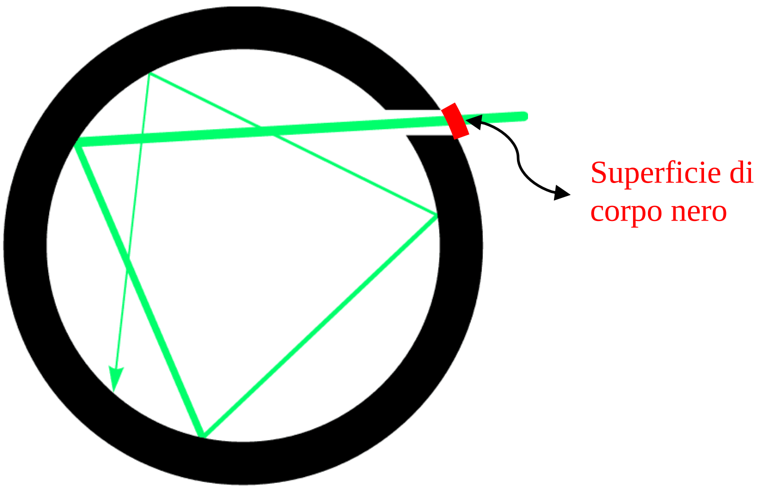


Fig. 3

Dimostrazione

Il corpo cavo è posto in un termostato in modo da mantenere la sua **temperatura uniforme**.
Onde elettromagnetiche di varie frequenze vengono generate e riempiono la cavità.
La relazione tra l'energia delle onde elettromagnetiche e la frequenza di esse, la **composizione spettrale**, dipende dalla **temperatura assoluta**.
Se si pratica un piccolo foro sulla parete della cavità questo piccolo foro è quasi perfettamente "**nero**": infatti, se si invia radiazione e.m. su di esso questa radiazione entra nella cavità dove viene in parte assorbita dalla parete interna e in parte riflessa; quest'ultima va a colpire un altro punto della parete interna dove viene nuovamente in parte assorbita e in parte riflessa e così via. Solo dopo numerosissime interazioni con la parete interna sarà possibile che, per caso, la parte residua di onde e.m. riesca a sfuggire dal piccolo foro. Praticamente il **potere di assorbimento** del piccolo foro è

$$a_{Foro}(\lambda, T) \cong 1$$

Quindi, in base alla definizione data di corpo nero, il forellino è "un corpo nero".
Inoltre, il forellino avrà pure un "**potere emissivo**":

$$\varepsilon_{Foro}(\lambda, T) \cong J(\lambda, T)$$

perché da esso esce di continuo radiazione e.m. . (C.V.D.)

III TEOREMA DI KIRCHHOFF

La densità di energia della radiazione e.m. in una cavità a temperatura uniforme T **è:**

1. **Isotropa.**
2. **Indipendente dal particolare punto interno alla cavità in cui viene misurata.**
3. **Indipendente dalla forma della cavità.**
4. **Indipendente dalla natura della sostanza che costituisce le pareti.**

Il punto **4.** permette di attuare una **semplificazione** molto importante: Poiché la natura della sostanza che costituiva le pareti della cavità è **irrilevante**, si sostituisce la materia della cavità con una "*sostanza fittizia*" : **oscillatori armonici carichi** la cui trattazione matematica è di gran lunga più semplice della materia reale.

LEGGE DI STEFAN (1879)

Il flusso totale irradiato da un corpo nero è proporzionale alla quarta potenza della sua temperatura.
In simboli:

$$\varepsilon = \int_0^\infty \varepsilon_\lambda \quad d\lambda = \sigma \; T^4 \tag{5}$$

dove T è la temperatura assoluta (in °K) del corpo nero e

$$\sigma = 5{,}67 \times 10^{-8} \, J \, m^{-2} \, K^{-4} \, s^{-1}$$

è una costante universale, detta ***costante di Stefan – Boltzmann***.

LEGGE DELLO SPOSTAMENTODI WIEN (1893)

All'aumentare della temperatura, il massimo di emissione si sposta verso lunghezze d'onda minori.

$$\lambda_{max} \times T = b = 2{,}898 \times 10^{-3} \ m \ K \qquad (6)$$

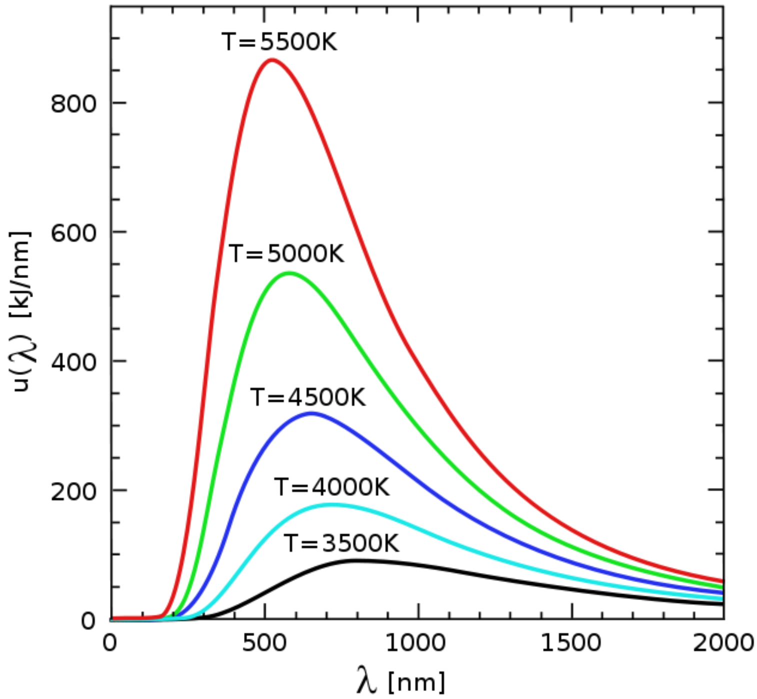


Fig. 4

La legge di Wien spiega come il flusso specifico $\varepsilon_{\lambda,BB\,(T)}$ emesso in funzione della lunghezza d'onda da parte di un corpo nero ad una certa temperatura T, mostri un picco che si sposta verso le lunghezze d'onda più corte o, ciò che è lo stesso, a frequenze più alte all'aumentare della temperatura stessa (Fig.4).

E' immediato introdurre, allora, il concetto di **temperatura di colore**, come quella temperatura alla quale corrisponde un ben determinato massimo di emissione. Questo è per esempio il metodo utilizzato per determinare la temperatura di una fornace o, più in generale, di un corpo incandescente per il quale è chiaramente impossibile pensare all'utilizzo di un termometro. In pratica, più caldo è un oggetto, più corta è la lunghezza d'onda a cui emetterà la maggior parte della propria radiazione. Il concetto di temperatura di colore è molto usato anche in astrofisica, dato che gli strati atmosferici più esterni delle stelle irradiano approssimativamente come corpi neri (Fig. 5). Per esempio, la temperatura superficiale del Sole è di 5778 K, il che dà un massimo per $\varepsilon_{\lambda,BB\,(T)}$ a circa 500 nm, vicino al centro dello spettro visibile.

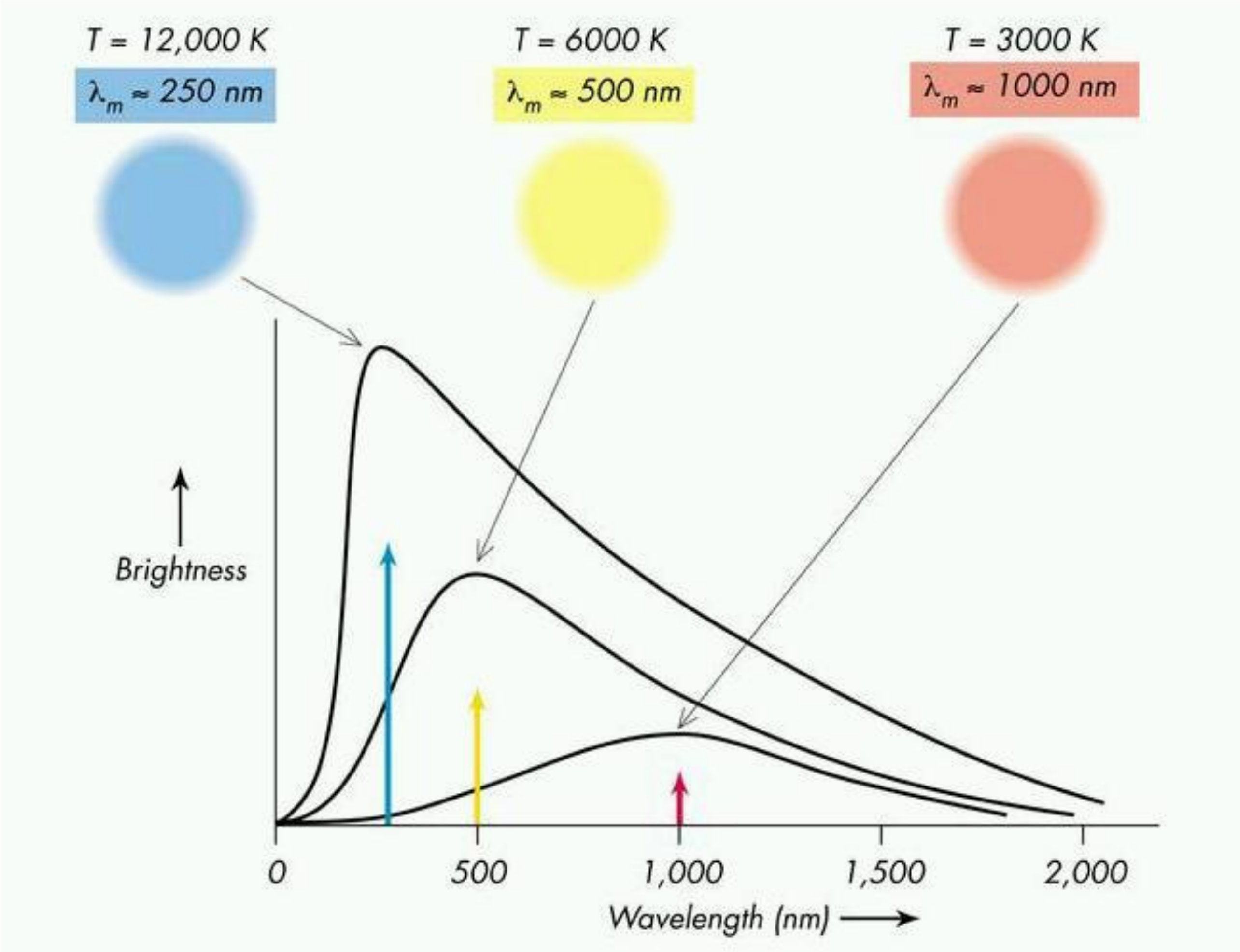


Fig.5

3. L'OSCILLATORE E LA FISICA CLASSICA

Riprendiamo il punto **4.** del III teorema di KIRCHHOFF, per il **principio d'inerzia** una carica elettrica *non soggetta a forze non può irradiare*.
Infatti una carica isolata in moto possiede soltanto energia cinetica: $E_{cin} = \frac{1}{2} mV^2 = \text{costante}$. Pertanto se irradiasse energia elettromagnetica si avrebbe: $E_{em} = -\Delta E_{cin} \Rightarrow \Delta V < 0$ contro il principio d'inerzia.
H.Hertz (1888) stabilì il seguente risultato: **Una carica puntiforme e dotata di accelerazione $\vec{a}$ irradia onde elettromagnetiche mediante una potenza**

$$W_{em} = \frac{2e^2}{3c^3} a^2 \qquad (7)$$

Il precedente risultato si può generalizzare a più cariche elettriche che occupano un piccolo volume τ posto nell'origine degli assi di un riferimento inerziale.
Consideriamo una carica che si comporta come un **oscillatore armonico unidimensionale** che oscilla con frequenza ν.

La sua posizione nel tempo è data $\begin{cases} x(t) = \bar{x} + x_0 \sin(2\pi\nu t) \\ y = \bar{y} \\ z = \bar{z} \end{cases}$. La potenza emessa in radiazione elettromagnetica è:

$$W_{em} = \frac{2e^2}{3c^3} x_0^2 (2\pi\nu)^4 \sin^2(2\pi\nu t) \tag{8}$$

W_{em} oscilla, in ogni punto dello spazio, in modo proporzionale al quadrato del seno che entra nel movimento dell'oscillatore. Questo è dovuto al fatto che, in ogni punto dello spazio, i campi elettrico e magnetico, prodotti durante l'oscillazione, oscillano con un analogo movimento sinusoidale.
In conclusione: **Un oscillatore armonico carico irradia nello spazio un'onda e.m. avente frequenza ν uguale alla frequenza meccanica di oscillazione**.
Mediando temporalmente su un periodo $\Pi = \frac{1}{\nu}$ si avrà:

$$\overline{W}_{em} \equiv \frac{1}{\Pi} \int_0^{\Pi} W_{em}(t) dt = \frac{2e^2}{3c^3} x_0^2 (2\pi\nu)^4 \tag{9}$$

Sulla (9) è basata la spiegazione del **cielo azzurro** (**1871, lord Rayleigh**):
Se le dimensioni delle particelle sono piccole rispetto alla lunghezza d'onda incidente, allora l'intensità della luce diffusa risulta inversamente proporzionale alla quarta potenza della lunghezza d'onda (Fig.6).

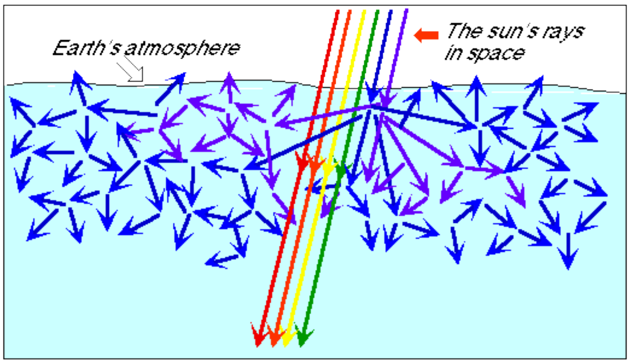


Fig.6

Si ottiene un risultato ancora più generale se consideriamo una carica e che si comporta come un **oscillatore anarmonico unidimensionale** che oscilla con frequenza ν, cioè compie un moto periodico ma non sinusoidale.
Tale moto è ovviamente sviluppabile in serie di Fourier: $x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \sin(2\pi k\nu t + \phi)$, con posizione di equilibrio $c_0 \sin\phi$.
Anche in questo caso, per la (9),possiamo scrivere per il valor medio della potenza emessa in radiazione elettromagnetica:

$$\overline{W}_{em} = \frac{1}{3c^3} \sum_{k=1}^{\infty} (ec_k)^2 (2\pi k\nu)^4$$

In conclusione: **Un oscillatore enarmonico, di frequenza meccanica ν, irradia contemporaneamente tutte le onde e.m. aventi le frequenze $\nu,\ 2\nu,\ 3\nu,\ \ldots$**.

Si pone ora il problema di come scrivere **l'equazione del moto di un oscillatore carico in equilibrio con il campo di radiazione elettromagnetica** presente in una cavità.

Per poterla scrivere abbiamo bisogno di sapere quale forza F_0 fa diminuire con continuità l'energia meccanica dell'oscillatore in favore dell'emissione elettromagnetica. Si può mostrare che se poniamo $F_0\dot{x} = -W_{em}$, allora :

$$F_0 = \frac{2e^2}{3c^3}\dddot{x}$$

Possiamo scrivere ora l'equazione del moto di un oscillatore carico in equilibrio con il campo di radiazione elettromagnetica. Essa è (supponendo che l'oscillatore sia vincolato a muoversi sul l'asse x, essendo anche la forza magnetica $F_m \perp \dot{x}$ il suo contributo, sull'asse x sarà nullo):

$$m\left(\ddot{x} + \omega_0^2 x\right) - \frac{2e^2}{3c^3}\dddot{x} = eE_x \tag{10}$$

con $\omega_0^2 = \dfrac{k}{m}$ ed $E_x = \text{componente x del campo elettrico della radiazione e.m. nella cavità}$.

Il campo E_x è il campo elettrico generale nel punto dove si trova l'oscillatore di carica e. E_x è stato emesso da tanti altri oscillatori simili a quello considerato (che costituiscono la cavità), è dunque **periodico**, con **periodo lunghissimo**.

La densità di energia elettromagnetica del campo di radiazione E_x è data da:

$$\varepsilon_{em} = \frac{3\bar{E}_x^2}{4\pi}$$

Ora è obbligatorio trovare **un collegamento tra la densità di energia del campo e l'energia media di un oscillatore carico in equilibrio con essa.** Integrando, opportunamente, l'equazione del moto di un oscillatore carico in equilibrio con il campo di radiazione elettromagnetica si trova:

$$\bar{\varepsilon}_{oscill} = \frac{c^3}{8\pi\nu^2}\varepsilon_{em}(\nu) \tag{11}$$

Combinando insieme elettromagnetismo e termodinamica Wien ottenne un primo grande risultato teorico, dimostrò che la densità di energia della radiazione elettromagnetica in equilibrio in una cavità a temperatura uniforme T si scrive come:

$$\varepsilon_{em}(\nu) = \nu^3 f\left(\frac{\nu}{T}\right) \tag{12}$$

con **la funzione $f\left(\frac{\nu}{T}\right)$ da determinare**.

Dalla (12) segue la legge dello spostamento (6) e la legge di Stefan (5)!! Tuttavia fu proprio la ricerca della funzione $f\left(\frac{\nu}{T}\right)$ che creò insormontabili problemi alla fisica classica di fine 1800.

Infatti, possiamo mostrare, con l'aiuto del calcolo dimensionale, che la fisica classica non è assolutamente in grado di riprodurre teoricamente le curve di corpo nero mostrate in Fig.5.

$$[\varepsilon_{em}] = \frac{\text{energia}}{\text{volume} \times \text{ frequenza}} = \frac{\text{massa} \times \dfrac{\text{lunghezza}^2}{\text{tempo}^2}}{\text{lunghezza}^3 \times \text{ tempo}^{-1}} = \frac{\text{massa}}{\dfrac{\text{lunghezza}}{\text{tempo}} \times \text{ tempo}^2}$$

Quindi:

$$\text{massa} \rightarrow \frac{\text{kT}}{\text{c}^2}, \quad \text{tempo} \rightarrow \frac{1}{\nu}, \quad \frac{\text{lunghezza}}{\text{tempo}} \rightarrow c$$

consegue proprio:

$$\varepsilon_{em}(\nu,T) \propto \frac{k}{c^3}\nu^2 T \tag{13}$$

Essa è in accordo con i dati sperimentali solo per **piccoli valori** di ν/T.

La (13) è nota come **Formula di Rayleigh – Jeans Essaè basata su proprietà ondulatorie**. Essa scritta in termini di lunghezza d'onda assume la forma

$$\varepsilon_{em}(\lambda,T) = \frac{2\pi c}{\lambda^4} kT$$

con $k = 1.381 \times 10^{-6}\, erg \cdot K^{-1} \equiv \text{costante di Boltzmann}$, $c = 3 \times 10^8\, m/s$ velocità della luce.

La formula di ***Rayleigh*** e ***Jeans*** implica, infatti, che il flusso specifico emesso da un corpo nero avrebbe dovuto seguire la ***legge di Rayleigh-Jeans*** scritta in lunghezze d'onda:

$$\varepsilon_{\lambda,BB}(T) = \frac{2\pi c}{\lambda^4} k_B T \tag{14}$$

al quale sarebbe associato un flusso emesso integrale $\varepsilon_{BB}(T)$ dato da :

$$\varepsilon_{BB}(T) = \int_0^{+\infty} \frac{2\pi c}{\lambda^4} k_B T \; d\lambda = \frac{2}{3}\pi \; c \; k_B \; T \left[\frac{1}{\lambda^3}\right]_0^{+\infty} \rightarrow \infty \tag{15}$$

Le espressioni (14) e (15) comportavano due risultati fisicamente inaccettabili che vanno sotto il nome di "**catastrofe ultravioletta**" (Fig. 7) perché:

- **una cavità radiante emetterebbe radiazione via via più intensa col crescere della lunghezza d'onda a qualunque temperatura ;**
- **il flusso integrale emesso sarebbe infinito, in contrasto con il principio di conservazione dell'energia**

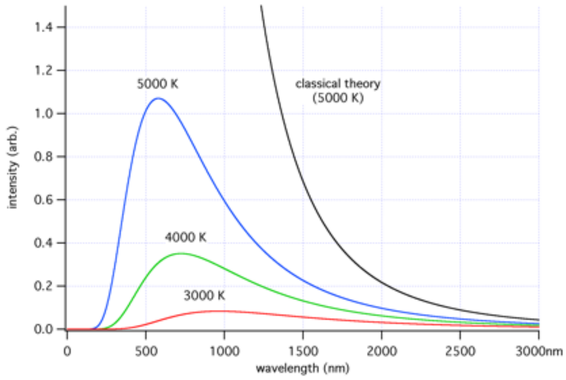


Fig. 7

Inoltre, basandosi su un ragionamento non rigoroso, per analogia con la formula di distribuzione di Maxwell per le velocità molecolari di un gas, **Wien** scrisse:

$$\varepsilon_{em}(\nu,T)=\alpha_0\nu^3 e^{-\beta_0 \nu/T} \tag{16}$$

dove α_0 e β_0 sono costanti da fissare in modo da riprodurre correttamente i dati sperimentali. Wien postulò che l'energia degli oscillatori seguisse la funzione di distribuzione, $e^{\frac{\varepsilon}{kT}}$, con $\varepsilon=\frac{1}{2}mV^2$ energia cinetica delle molecole dei gas; si può quindi che la **formula empirica di Wien è basata su proprietà corpuscolari**. Oggi i valori corretti per le due costanti empiriche sono: $\alpha_0=\frac{8\pi h}{c^3}$, $\beta_0=\frac{h}{k}$ con:

$$h=6.626\times10^{-27}\,erg\cdot\sec \equiv \text{costante di Planck}$$

Essa è in accordo con i dati sperimentali solo per **grandi valori** di ν/T.

4. FORMULA DI PLANCK (14 Dicembre 1900)

Planck intuì che la legge giusta per $\varepsilon_{em}(\nu,T)$ dovesse essere una specie di media logica fra le formule approssimate di Wien e di Rayleigh – Jeans.
Planck basò le sue considerazioni principalmente sulla seguente argomentazione:
"La radiazione e.m. avente distribuzione spettrale $\varepsilon_{em}(\nu,T)$ viene continuamente emessa e riassorbita dagli oscillatori armonici costituenti le pareti della cavità. Questi oscillatori hanno frequenze meccaniche $\nu=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$ uguali a quelli della radiazione osservata. Inoltre, considerati tutti gli oscillatori con la **stessa frequenza** ν, ma con **diversa energia** ε (infatti l'energia di un oscillatore dipende dal quadrato dell'ampiezza della sua oscillazione), fra la loro **energia media** $\bar{\varepsilon}_{oscill}$ e $\varepsilon_{em}(\nu,T)$ intercorre la **relazione**: $\varepsilon_{em}(\nu,T)=\frac{8\pi}{c^3}\nu^2\bar{\varepsilon}_{oscill}$. Tale relazione esprime un preciso rapporto fisico fra la radiazione (rappresentata a sinistra da $\varepsilon_{em}(\nu,T)$ e la materia rappresentata a destra da $\bar{\varepsilon}_{oscill}$). Se si calcola l'energia media $\bar{\varepsilon}_{oscill}$ utilizzando la

distribuzione statistica classica considerando variazioni continue dell'energia di un oscillatore si trova:

$$\bar{\varepsilon}_{oscill} = \frac{\int_0^\infty \varepsilon \cdot e^{-\beta e} d\varepsilon}{\int_0^\infty e^{-\beta e} d\varepsilon} = -\frac{d}{d\beta} \ln\left\{\int_0^\infty e^{-\beta e} d\varepsilon\right\} = -\frac{d}{d\beta} \ln\left\{\frac{1}{\beta}\right\} = \frac{1}{\beta} = kT$$

in questo modo si riottene la formula di Rayleigh – Jeans. Tuttavia se si assume che **l'energia degli oscillatori ε può avere in natura solo valori discreti multipli di un quanto energetico fondamentale ε_0:**

$$\varepsilon = \varepsilon_0,\ 2\varepsilon_0,\ 3\varepsilon_0, \ldots\ldots,\ n\varepsilon_0,\ \ldots. \tag{17}$$

si trova:

$$\bar{\varepsilon}_{oscill} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} n\varepsilon_0 e^{-\beta n \varepsilon_0}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta n \varepsilon_0}} = -\frac{d}{d\beta} \ln\left\{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta n \varepsilon_0}\right\} = -\frac{d}{d\beta} \ln\left\{\sum_{n=0}^{\infty} \left(e^{-\beta \varepsilon_0}\right)^n\right\} = \frac{d}{d\beta} \ln \frac{1}{1-e^{-\beta\varepsilon_0}} = \frac{\varepsilon_0}{e^{-\beta\varepsilon_0} - 1}$$

e infine ponendo $\varepsilon_0 = h\nu$ e $\beta = 1/kT$ si ottiene:

$$\bar{\varepsilon}_{oscill} = \frac{h\nu}{\exp\left(h\nu/kT\right) - 1}$$

Per cui sostituendo nell'espressione:

$$\varepsilon_{em}(\nu, T) = \frac{8\pi}{c^3} \nu^2 \bar{\varepsilon}_{oscill}$$

il risultato è:

$$\varepsilon_{em}(\nu, T) = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{\exp\left(h\nu/kT\right) - 1} \tag{18}$$ ".

La (18) è la famosa **Formula di Planck per il corpo nero**, che si accorda splendidamente con i risultati sperimentali.
La **Formula di Planck** in lunghezza d'onda è:

$$\varepsilon_{\lambda,BB}(T) = \frac{2\pi c^2 h}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/\lambda kT} - 1} \tag{19}$$

Sostituendo la (19) nella (15) si ottiene la **legge di Stefan** (5).
Si nota subito che la funzione (19) è **massima** quando $\lambda^5\left(e^{hc/\lambda kT} - 1\right)$ è **minimo**.
Quindi:

$$\frac{d}{d\lambda}\left[\lambda^5\left(e^{hc/\lambda kT} - 1\right)\right] = 0$$

cioè:

$$5\lambda^4 \lambda^5 \left(e^{hc/\lambda kT} - 1\right) + \lambda^5 e^{hc/\lambda kT}\left(-\frac{hc}{kT}\frac{1}{\lambda^2}\right) = 0$$

La λ_{Max} deve soddisfare l'equazione:

$$1-e^{-hc/\lambda_{Max}kT}=\frac{1}{5}\frac{hc}{\lambda_{Max}kT}$$

Inoltre ponendo $x=\dfrac{hc}{\lambda_{Max}kT}$ si ha l'equazione:

$$1-e^{-x}=\frac{x}{5}$$

Equivalente al sistema:

$$\begin{cases} y=1-e^{-x} \\ y=\dfrac{x}{5} \end{cases}$$

Risolvendo numericamente l'equazione si ottiene:

$$x_{Max}=\frac{hc}{\lambda_{Max}kT}=4.96 \Rightarrow \lambda_{Max}T=2.898\cdot 10^{-3}mK$$

cioè la **legge dello spostamento di Wien** (6).

L'ipotesi $\varepsilon_0=h\nu$ implica una **relazione radicalmente nuova** fra l'energia e la frequenza dell'oscillatore armonico, dato che **in fisica classica queste due variabili sono indipendenti**. La frequenza è fissata una volta per tutte dalla massa e dalla costante elastica ($\nu=\dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{k}{m}}$), mentre l'energia dipende dall'ampiezza dell'oscillazione, ma non dalla frequenza. Altresì è importante notare che questa "**quantizzazione**" dell'energia degli oscillatori implica **una quantizzazione anche dell'energia emessa sotto forma di radiazione e.m.** . Infatti, se un oscillatore cambia la sua energia (ad es. da $2h\nu$ a $h\nu$) lo deve fare molto rapidamente, dato che non può avere stati energetici intermedi, e deve quindi sbarazzarsi in gran fretta dell'eccesso energetico $h\nu$ emettendolo sotto forma di radiazione e.m. . La rapidità dell'emissione ($\Delta t_{emiss} << 1$) implica una localizzazione spaziale dell'emissione stessa (se c è la velocità della luce, detto $r_{el}=\dfrac{e^2}{m_e c^2}$ il raggio classico dell'elettrone che emette, allora nel tempo $\Delta t_{emiss} \cong \dfrac{r_{el}}{c}=\dfrac{e^2}{m_e c^3}=\dfrac{(4.8\cdot 10^{-10})^2}{9.11\cdot 10^{-28}\cdot(3\cdot 10^{10})^3}\cong 9.4\cdot 10^{-24}\sec$ l'estensione spaziale di tale pacchetto di radiazione e.m. è $\Delta x \le c\Delta t_{emiss}\cong 2.8\cdot 10^{-13}cm$), che non può estendersi su grandi volumi come accadeva nel caso classico.

Questa precisa idea fu sviluppata nel 1905 da Einstein che introdusse veri e propri corpuscoli della radiazione e.m., i **fotoni**, ciascuno dotato di energia $h\nu$.